1. Kinematika

A kinematika arra próbál választ adni, hogy a test hogyan mozog, amit a pálya tanulmányozásával válaszol meg. A test mozgására jellemző kinematikai mennyiségek **időbeni változását** fogjuk megvizsgálni, így lehet a mozgásokat kategorizálni egyenletes és változó mozgásokra. Jegyezzük meg, hogy a kinematikában csak pontszerű testek mozgásával foglalkozunk, a térbeli alakot pedig nem vesszük figyelembe. A kinematikában a testek mozgásait az **s elmozdulás**, **v sebesség**, és az **a gyorsulás** segítségével fogjuk leírni.

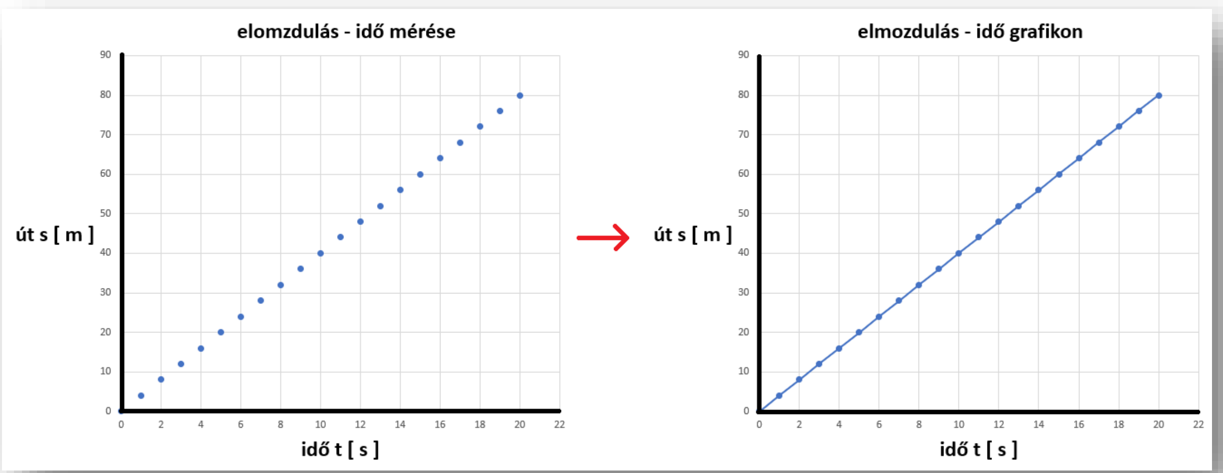
1. **s** : elmozdulás, mérték egysége: [m]
2. **v** : sebesség, mérték egysége: [m/s]
3. **a :** gyorsulás, mérték egysége: [m/s^2]

1.1 Egyenes vonalú egyenletes mozgás, v=áll.

Tekintsük először azt az 1 dimenziós mozgást amikor egy autó halad előre. Végezzünk mérést olyan módon, hogy az autó által megtett út nagyságát feljegyezzük időegységenként, amiből a következő táblázat keletkezik.

út, s [m]	0	4	8	12	16	20	24	28	32
idő, t [s]	0	1	2	3	4	5	6	7	8

Ha a mérésből keletkező számokat koordináta rendszerben ábrázoljuk akkor a lenti ábra jön létre, ahol a kék pöttyök a mérési pontokat jelölik. A mérési pontokat összekötjük egy egyenessel, így kapjuk meg az elmozdulás-idő grafikont vagy függvényt. **A grafikonon lévő görbe egy origón átmenő egyenes.**



A mérésből keletkező ábrából azt a következtetést lehet levonni, hogy a mozgásra jellemző elmozdulás-idő függvény alakja egy origón átmenő egyenes. Az origón átmenő egyenes pedig azt fejezi ki, hogy az elmozdulás és az idő **arányosak egymással**, az arányosság típusa **egyenesen**.

$$\mathbf{s \sim t}$$

Ez matematikailag azt jelenti, hogy a **két mennyiség hányadosa állandó**. Ezt a mozgásra jellemző állandót nevezzük a **v sebességnek**. Ez a **v** sebesség a mozgás folyamán nem változik meg, ekkor hívjuk a mozgást **egyenletesnek**, ezt azt is jelenti, hogy a mozgás folyamán nem nő vagy csökken a sebesség.

$$\mathbf{\frac{s}{t} = \text{áll.} = v}$$

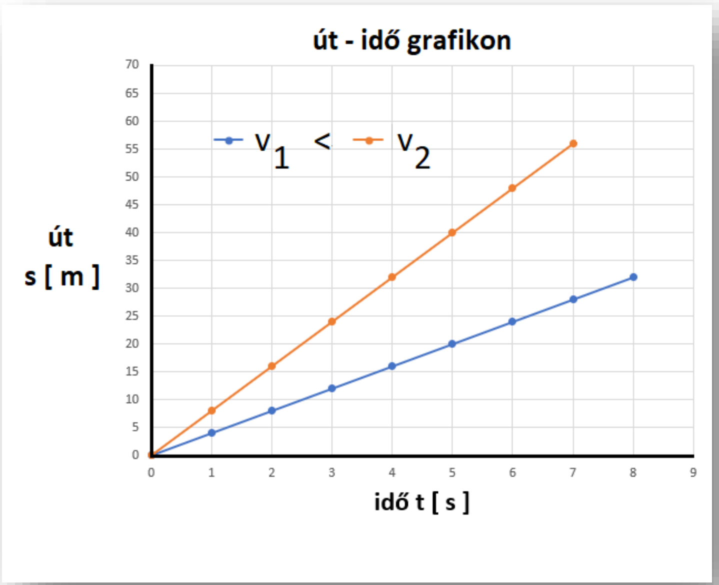
Egyenletes mozgás esetén a sebességet ki lehet számolni az elmozdulás és az idő hányadosából.

$$\mathbf{v = \frac{s}{t}}$$

mértékegység:

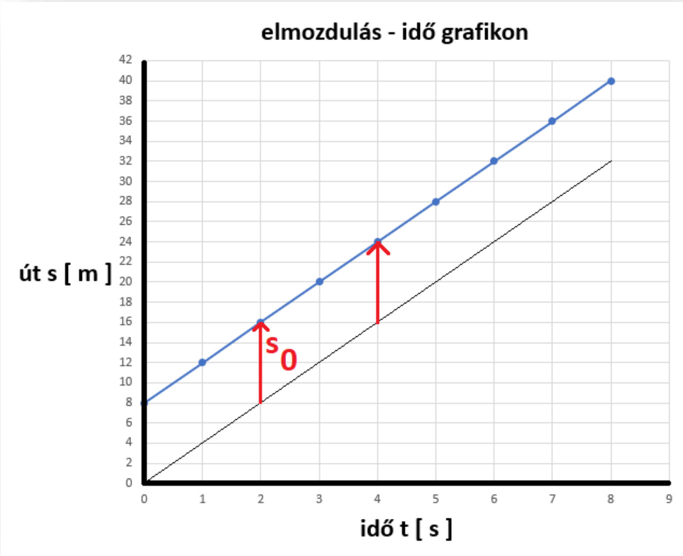
$$v = 1\left[\frac{m}{s}\right]$$

Az elmozdulás-idő grafikonon a meredekebb görbe a nagyobb sebességhez tartozik hozzá.



elmozdulás: s [m]	sebesség: v [m/s]
$\mathbf{s} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$ ha megjelenítem a változót is: $\mathbf{s(t)} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$	$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{s}}{\mathbf{t}}$

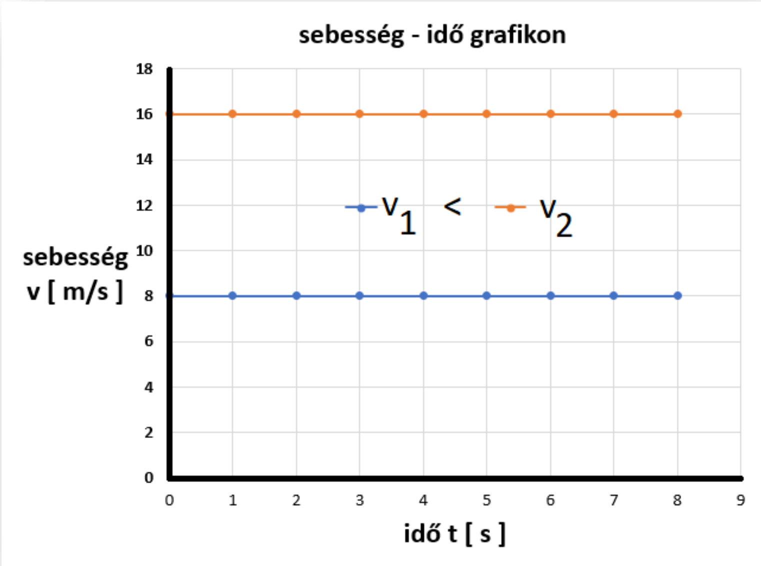
Ha van kezdeti elmozdulás akkor nem az origóból indul ki a grafikon, hanem eltolódik függőlegesen felfelé $\mathbf{s_0}$ értékkel.



$$\mathbf{s} = \mathbf{s_0} + \mathbf{v} \cdot \mathbf{t}$$

Az $\mathbf{s_0}$ tag fejezi ki, hogy a testnek van kezdeti elmozdulása, hiszen az nem az $\mathbf{s} = \mathbf{0}$ helyről indult.

Ha ábrázoljuk a sebesség-idő függvényt egyenletes mozgás esetén akkor egy vízszintes egyenest kapunk. Ha egy függvény grafikonja vízszintes egyenes akkor a függvényérték vagyis a függőleges tengelyen lévő érték minden időpillanatban ugyanaz az a szám. Az ilyen tulajdonságú függvényeket hívjuk **konstans függvénynek**. Jegyezzük meg, hogy a **v** mennyiség, vektor mennyiség tehát iránya is van nem csak nagysága, szemben pl. a hőmérséklettel, ami skalármennyiség, így annak csak nagysága van. Azt, hogy a **v** vektor mennyiség egy vonallal szokás jelölni: $\bar{\mathbf{v}}$



A magasabban lévő vonal a nagyobb sebességet jelenti.

1.2 Egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás

Egyenletesen változó mozgás esetén a sebesség egyenletesen változik (itt éppen növekszik). Ebben az esetben, ha ábrázoljuk a sebesség-idő függvényt derékszögű koordináta rendszerben akkor egy origón átmenő egyenest kapunk.

Az origón átmenő egyenes azt fejezi ki, hogy a **v** sebesség arányos a **t** idővel, egyenesen.

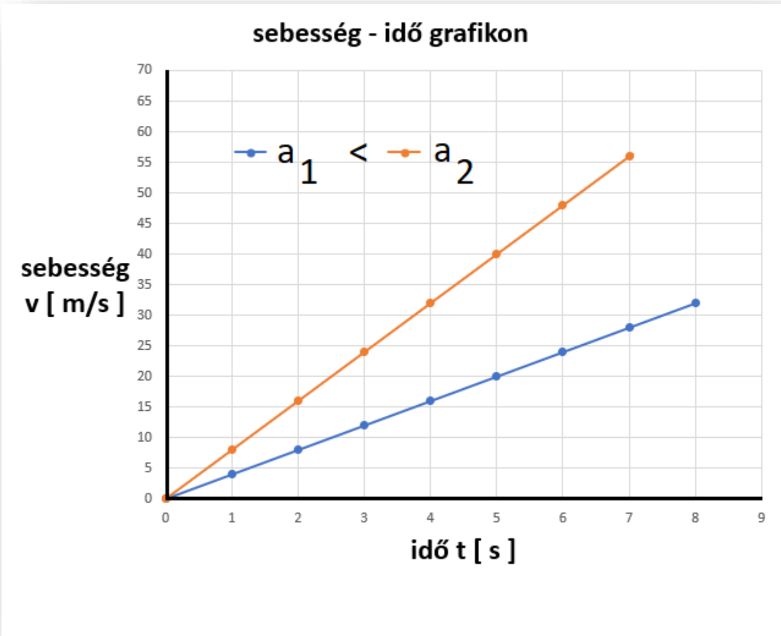
$$\mathbf{v \sim t}$$

Ez matematikailag azt fejezi ki, hogy a két mennyiség hányadosa állandó.

$$\frac{\mathbf{v}}{\mathbf{t}} = \mathbf{áll.} = \mathbf{a}$$

Ezt az állandót nevezzük a változó mozgásra jellemző **a gyorsulásnak**. A gyorsulás mértékegysége:

$$\mathbf{a = 1\ \ [\ m\ /\ s^2\ ]}$$



A meredekebbik vonal tartozik hozzá a nagyobb gyorsuláshoz: $\mathbf{a_2} > \mathbf{a_1}$. A gyorsulás a sebességhez hasonlóan szintén vektor mennyiség $\bar{\mathbf{a}}$, vagyis nemcsak nagysága van, hanem iránya is. A gyorsulást a sebesség és az idő hányadosából lehet kiszámolni.

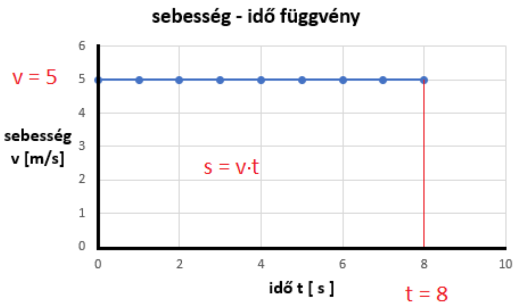
$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}}{\mathbf{t}} = \frac{\Delta\mathbf{v}}{\Delta\mathbf{t}} = \frac{\mathbf{v_2 - v_1}}{\mathbf{t_2 - t_1}}$$

Ennek a képletnek az átrendezéséből kapjuk meg, hogy a **v** sebességet hogyan lehet kiszámolni ha a mozgás változó, vagyis gyorsuló vagy lassuló.

$$\mathbf{a = \frac{v}{t} \rightarrow v = a \cdot t}$$

1.3 A görbe alatti terület szerepe

<table>
<tr><th>egyenletes mozgásnál</th><th>változó mozgásnál</th></tr>
<tr><td>



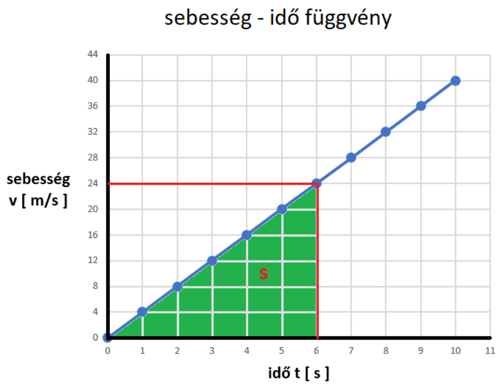
Ha **t** ideig mérjük a **v** sebességet, ami végig állandó nagyságú hiszen a mozgás egyenletes, akkor az s=v·t szorzat a görbe alatti téglalap területével egyenlő. Következtetés: az elmozdulás egyenlő v(t) függvény görbe alatti területével.

$$\mathbf{s = v \cdot t}$$

A fenti ábrán a megtett út így:

$s = v \cdot t = 5 \cdot 8 = 40\ m$

</td><td>



Ez a gondolatmenet igaz változó mozgásra is. Ha **t** ideig mérjük a **v** sebességet, ami folyamatosan növekszik hiszen a mozgás változó, akkor a

$$\mathbf{s = (v \cdot t)/2}$$

szorzat a görbe alatti **zöld** háromszög területével egyenlő. Helyettesítsük be a $\mathbf{v = a \cdot t}$ képletet a **v** helyére.

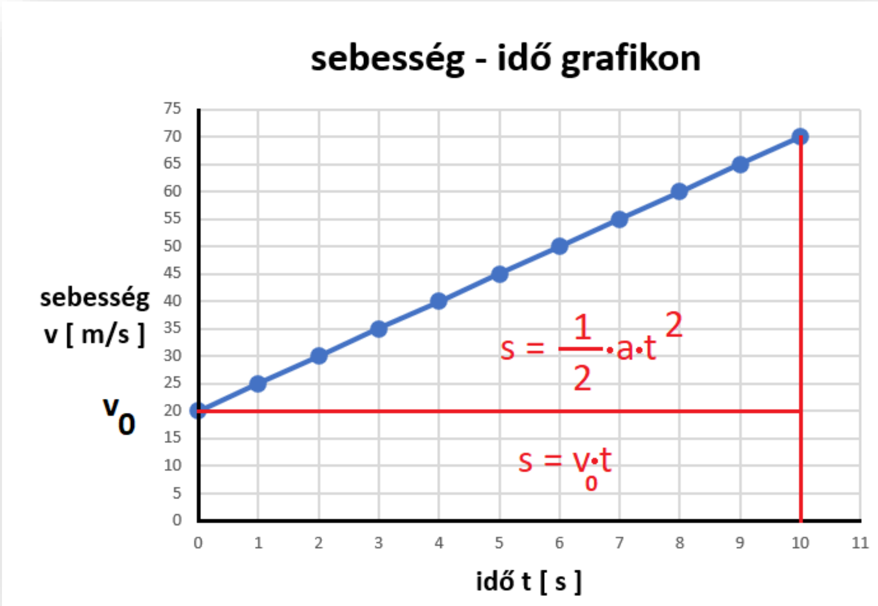
$$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t \cdot t}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Tehát változó mozgás esetén, ami azt jelenti, hogy van gyorsulás $\mathbf{a \neq 0}$, az elmozdulást a lenti képletből lehet kiszámolni.

$$\mathbf{s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

</td></tr>
</table>

Ha a testnek van kezdeti sebessége, amiről elkezd felgyorsítani akkor fenti két ábra egyesítéséből kapjuk a következőt:



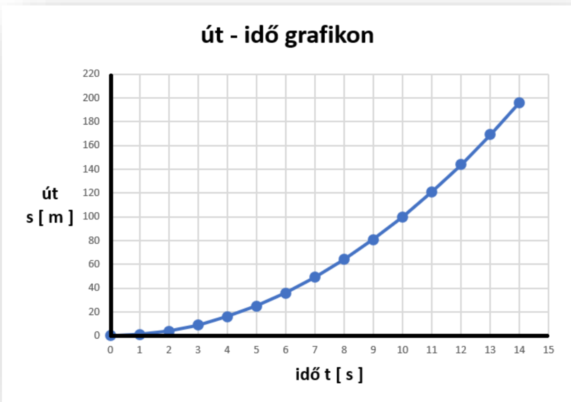
Ebben az esetben a görbe alatti terület két részből tevődik össze:

$$\mathbf{1.\ s = v_0 \cdot t} \qquad \mathbf{2.\ s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

$$\mathbf{s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$$

1.4 Változó mozgás esetén az elmozdulás idő függvény

Mivel a test gyorsul ezért időegységenként egyre nagyobb utat tesz meg, ami azt eredményezi, hogy az elmozdulás-idő függvény nem lehet egyenes! Ezt onnan is tudjuk, hogy a lenti képletben a **t** idő másodfokon szerepel.

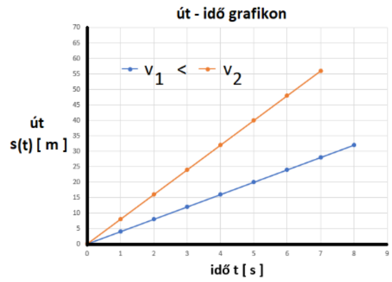
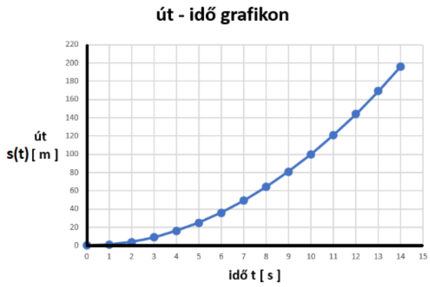
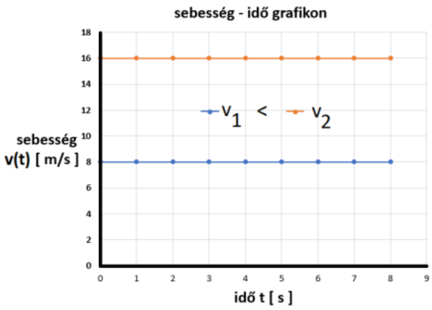
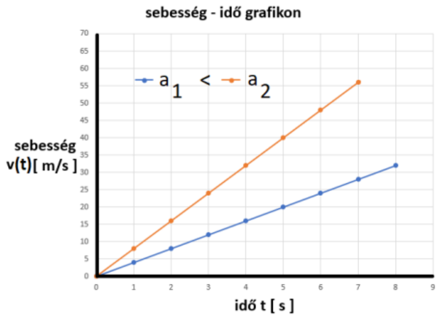
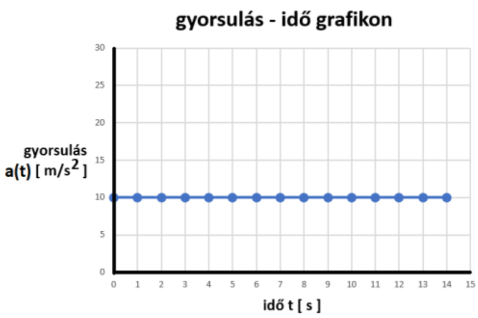


$$s(t) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$

Az elmozdulás-idő függvény grafikonja parabola függvény.

1.5 Összefoglalás

Feladat megoldás során fel kell ismerni, hogy a bal vagy jobb oldali oszlopot kell használni.

egyenletes mozgás: $\mathbf{a = 0 \rightarrow v =}$ áll.	**változó mozgás: $\mathbf{a \neq 0 \rightarrow v \neq}$ áll.** **pl.: van $\mathbf{v_1}$ és $\mathbf{v_2}$**
elmozdulás, út:  $\mathbf{s = v \cdot t}$ ha van kezdeti elmozdulás: $\mathbf{s_0}$ $\mathbf{s = s_0 + v \cdot t}$	**elmozdulás, út:**  $\mathbf{s = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$ ha van kezdeti sebesség: $\mathbf{v_0}$ $\mathbf{s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2}$
sebesség:  $\mathbf{v = \frac{s}{t}}$	**sebesség:**  $\mathbf{v = a \cdot t}$ ha van kezdeti sebesség: $\mathbf{v_0}$ $\mathbf{v = v_0 + a \cdot t}$
gyorsulás: $\mathbf{a = 0}$ A gyorsulás-idő függvényt egyenletes mozgás esetén nem szokás megadni hiszen a gyorsulás nulla.	**gyorsulás:**  $\mathbf{a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v}{t}}$

1.6 Az idő nélküli képlet

Ennél a levezetésnél az időt nem számoljuk ki, hiszen az ki van küszöbölve az egyenletekből. Ha a test sebessége $\mathbf{v_1}$ értékről egyenletesen változik $\mathbf{v_2}$ értékre, akkor az átlagsebesség e két sebesség számtani közepe lesz:

$$\mathbf{s = v \cdot t = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot t}$$

$$\mathbf{a = \frac{\Delta v}{t} \rightarrow t = \frac{\Delta v}{a}}$$

$$\mathbf{s = v \cdot t = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot t = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \frac{\Delta v}{a} = \frac{v_2 + v_1}{2} \cdot \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a}}$$

Ha a test kezdő sebessége $\mathbf{v_1 = 0}$, akkor az összefüggés tovább egyszerűsödik:

$$\mathbf{s = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a} = \frac{v^2}{2a}}$$

$$\mathbf{s = \frac{v^2}{2a}}$$

1.7 Átlagsebesség

Egy mozgó test átlag sebességét úgy lehet kiszámolni, hogy a megtett útszakaszok összegét elosztjuk a hozzájuk tartozó időtartamok összegével.

$$\mathbf{v_{\text{átlag}} = \frac{s_{\text{ö}}}{t_{\text{ö}}} = \frac{s_1 + s_2}{t_1 + t_2}}$$

Általában a sebességek matematikai átlaga nem egyenlő a fizikai átlaggal.