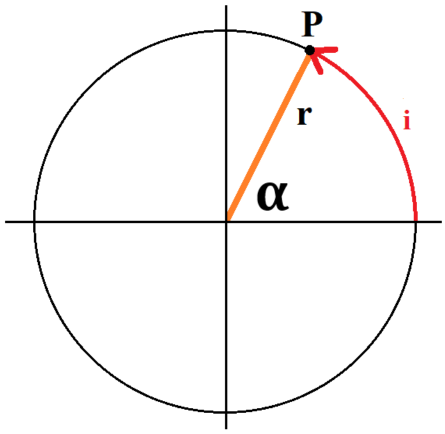
2. Körmozgás

2.1 Egyenletes körmozgás

Ha az egységkör ($\mathbf{r} = \mathbf{1}$) körívén mozgó P pont egyenlő idők alatt egyenlő nagyságú **α** szögekkel fordul el, vagy egyenlő nagyságú **i** köríveket tesz meg, akkor a körmozgás **egyenletes**. Az **α** szöget radiánban mérjük.



A befutott körök számát jelöljük z-vel, melynek neve fordulatok száma.

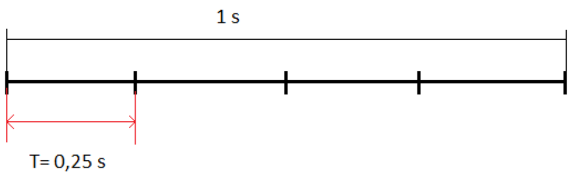
$$\mathbf{z = 1[db] = \frac{\Delta\alpha}{2\pi}}$$

Az egész kör bejárásához szükséges időt T periódusidőnek hívjuk.

T = 1 [s].

A körmozgás gyakoriságát nevezzük frekvenciának

A **T** periódusidő segítségével ki lehet számolni a körmozgás gyakoriságát vagy **frekvenciáját**. Ezt úgy lehet értelmezni, hogy megvizsgáljuk, hogy az egységnyi időtartamba hányszor fér bele a **T** periódusidő. Ha sokszor, akkor a körmozgás „szapora", ellenkező esetben pedig „lomha".



pl.: Ha **T = 0,25 s**, akkor ez négyszer fér bele az egységnyi időbe, így a körmozgás gyakorisága vagy frekvenciája:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}25s} = 4\ \frac{1}{s} = 4\ \mathrm{Hz}$$

Ez alapján tehát a frekvenciát kiszámolhatjuk, a következő módon:

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} = \left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{s}}\right] = 1\ [\,\mathrm{Hz}\,]$$

Szorozzuk meg a fenti egyenlet mindkét oldalát **T**-vel:

$$\mathrm{f} \cdot \mathrm{T} = 1$$

Ebből az egyenletből pedig látszik, hogy a frekvencia és a periódusidő fordítottan arányosak, vagyis szorzatuk állandó. Ez azt jelenti, hogy ha az egyik mennyiség megnő akkor a másik lecsökken. Pl.: **nagy** periódus idő **kis** frekvenciát jelent, vagy ennek a fordítottja is igaz: **kis** periódusidő pedig **nagy** frekvenciát.

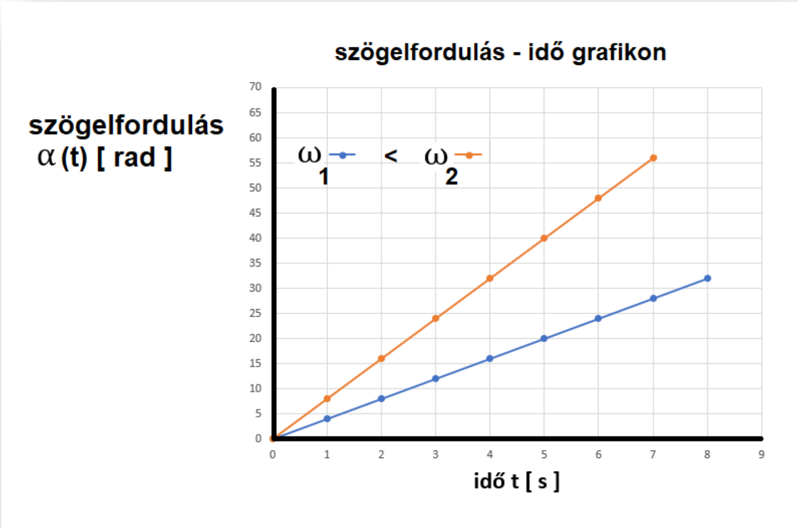
A frekvenciát a körmozgás esetében fordulatszámnak is hívhatjuk.

$$\mathbf{f} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{T}} = \mathbf{1}\left[\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{perc}}\right]$$

A frekvencia meg a fordulatszám mennyiségek lényegében ugyanazt jelentik. A frekvencia általánosabb fogalom ami bármilyen periodikus folyamat gyakoriságát adja meg, a fordulatszámot pedig szűkebb értelemben inkább körmozgásoknál szokás használni.

2.2 A körmozgás szögsebessége

A körmozgást lehet jellemezni az $\boldsymbol{\alpha}$ szögelfordulás segítségével, egyszerűen úgy, hogy megadjuk a szögelfordulás időfüggését, az $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}(\mathbf{t})$ függvényt.



Mivel az **α** szögelfordulás időfüggését megadó függvény egy origón átmenő egyenes ezért ebből arra lehet következtetni, hogy az **α** szögelfordulás arányos a **t** idővel.

$$\boldsymbol{\alpha \sim t}$$

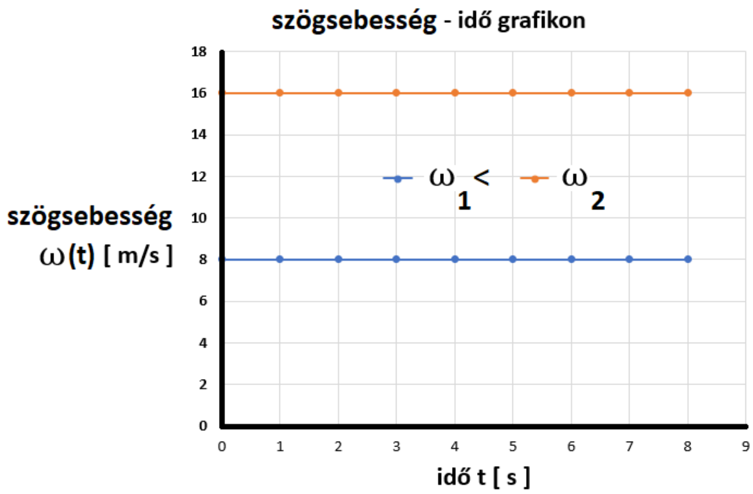
Ez az arányosság egyenes, ami az jelenti, hogy a két mennyiség hányadosa állandó.

$$\frac{\alpha}{t} = \text{áll.} = \omega$$

Ezt az állandót hívjuk az egyenletes körmozgásra jellemző **ω szögsebességnek** vagy körfrekvenciának, melynek mértékegysége: **[1/s].**

$$\omega = \frac{\alpha}{t}$$

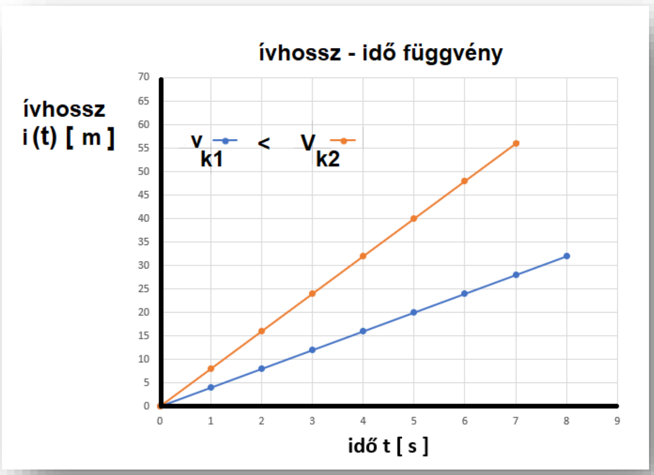
Ha a körmozgás egyenletes akkor az **ω** szögsebesség **állandó nagyságú**. Ezt láthatjuk a lenti ábrán, ahol a $\boldsymbol{\omega(t)}$ függvény konstans függvény vagyis vízszintes egyenes**.**



Az **α** szögelfordulás nagysága, ha teljesen körbe fordul a test, $\alpha = 2 \cdot \pi \approx 6{,}28\ \mathrm{rad}$. Eközben az idő, ami eltelik, az 1 teljes körbeforduláshoz szükséges idő, a **T periódusidő**. Ha ezeket behelyettesítjük az **α** és a **t** helyére azt kapjuk, hogy:

$$\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f$$

A másik módszer amikor úgy tanulmányozzuk az egyenletes körmozgást, hogy mérjük az **i ívhossz** időbeni változását, vagyis az $\mathbf{i(t)}$ függvényt.



Mivel az **i** ívhossz időfüggését megadó függvény egy origón átmenő egyenes ezért ebből arra lehet következtetni, hogy az **i** ívhossz arányos a **t** idővel.

$$\mathbf{i \sim t}$$

Ez az arányosság egyenes, ami az jelenti, hogy a két mennyiség hányadosa állandó.

$$\frac{i}{t} = \text{áll.} = v_k$$

Ezt az állandót hívjuk az egyenletes körmozgásra jellemző $\mathbf{v_k}$ **kerületi sebességnek**, melynek mértékegysége: **[m/s]**. És mivel ez vektor mennyiség ezért iránya is van meg nagysága is. A nagysága állandó, az iránya pedig változik, a sugárra viszont mindig merőleges.

$$\mathbf{v_k = \frac{i}{t}}$$

Az $\mathbf{i}$ ívhossz nagysága, ha teljesen körbe fordul a test, $K_{kör} = 2 \cdot r \cdot \pi$ a kör kerülete. Eközben a $\mathbf{t}$ idő, ami eltelik, az 1 teljes körbeforduláshoz szükséges idő, a **T periódusidő**. Ha ezeket behelyettesítjük az $\mathbf{i}$ és a $\mathbf{t}$ helyére:

$$v_k = \frac{i}{t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = r \cdot \frac{2\pi}{T} = r \cdot \omega$$

2.3 Összefoglalás:

$\mathbf{z = 1}$ $[\mathbf{db}]$

$\mathbf{f = \frac{1}{T}}$ **[1/s]**

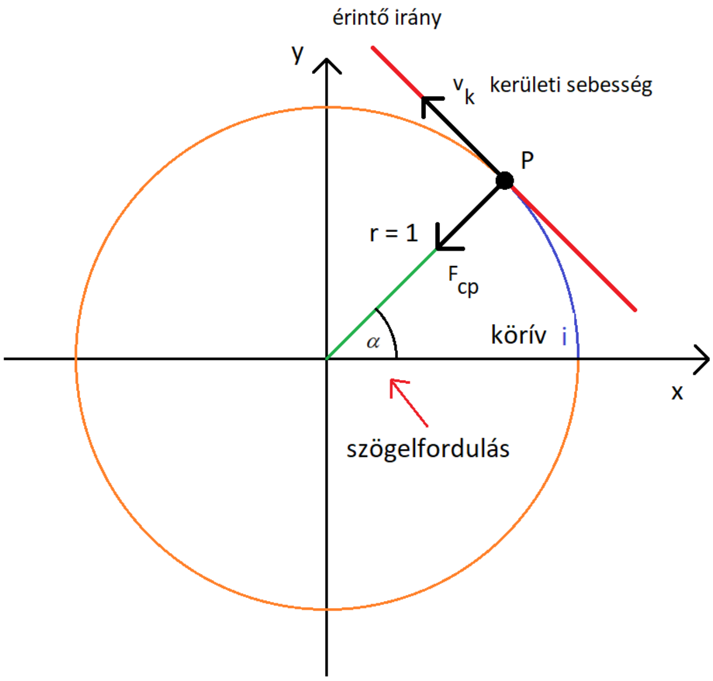
$\boldsymbol{\omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot \frac{1}{T} = 2\pi \cdot f}$ **[1/s]**

$\mathbf{v_k = \frac{i}{t} = \frac{2 \cdot r \cdot \pi}{T} = r \cdot \frac{2\pi}{T} = r \cdot \boldsymbol{\omega}}$ **[m/s]**

egyenes vonalú egyenletes mozgás	**egyenletes körmozgás**
$v = \frac{s}{t}$ $s = v \cdot t$	$\omega = \frac{\alpha}{t}$ $\alpha = \omega \cdot t$

2.4 Az egyenletes körmozgás dinamikája

2.4.1 Centripetális erő



A v_k kerületi sebesség érintő irányú, az F_{cp} centripetális erő sugár irányú.

Ahhoz, hogy a körmozgást fenntartsuk rendelkezésre kell állnia egy erőnek, ami a körmozgást végző testet körpályán tartja. Ha ez az erő nincs jelen, akkor a test érintő irányban fog tovább repülni. Ezt az erőt hívjuk centripetális erőnek. Newton 2. törvényéből tudjuk, hogy az $\mathbf{F} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a}$ -val egyenlő ezért:

$$\mathbf{F_{cp}} = \mathbf{m} \cdot \mathbf{a_{cp}} = \mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{v_k^2}}{\mathbf{r}}$$

ahol:

$$\mathbf{a_{cp}} = \frac{\mathbf{v_k^2}}{\mathbf{r}} = (\boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{r})$$

A centripetális gyorsulás mértékegységét a képlet alapján ki lehet következtetni.

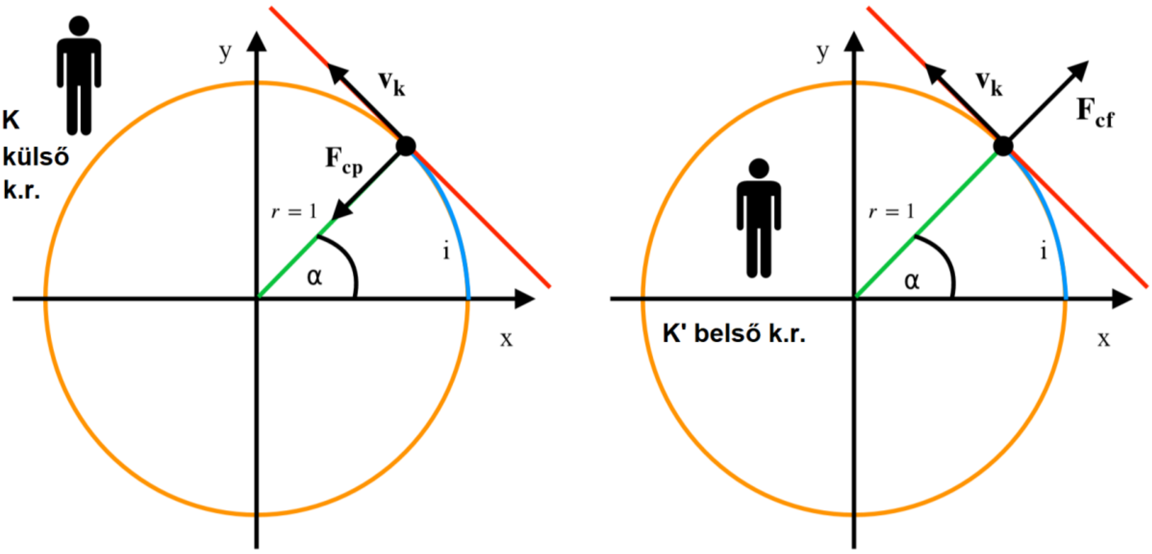
$$a_{cp} = 1 \cdot \frac{v_k^2}{r} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{m} = 1 \cdot \frac{\left(\frac{m^2}{s^2}\right)}{\frac{m}{1}} = 1 \cdot \left(\frac{m^2}{s^2}\right) \cdot \frac{1}{m} = 1 \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$\mathbf{a_{cp}} = \mathbf{1} \cdot \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{s^2}}$$

2.4.2 Centrifugális erő

Ha a **K** külső koordináta rendszerből tanulmányozzuk a körmozgást akkor az $\mathbf{F_{cp}}$ erőt lehet megfigyelni, ez az erő szükséges a körmozgás fenntartásához. A mozgást belső koordináta rendszerből is tanulmányozható. Ezt úgy lehet elképzelni mintha a körmozgást végző P pont egy körlappal együtt mozogna. Ha a megfigyelő rááll a körlapra és azzal együtt kezd el forogni akkor a **K'** belső koordináta rendszerbe került. A **K'** belső koordináta rendszerből vizsgálva a jelenséget az előzővel megegyező nagyságú és ellentétes irányú $\mathbf{F_{cf}}$ erőt lehet érzékelni. Erre jó példa a kanyarodó autó esete amikor $\mathbf{F_{cf}}$ nekinyomja az utast az ablaküvegnek és az $\mathbf{F_{cp}}$ erő pedig körpályán tartja az utast miközben kanyarodik.

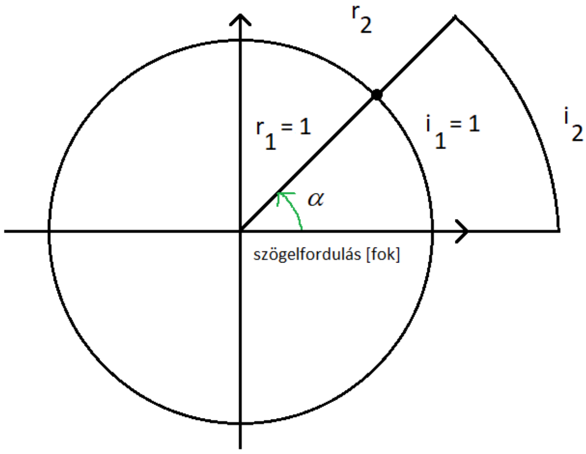
$$\mathbf{a_{cf}} = \frac{\mathbf{v_k^2}}{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathbf{r}$$



A két erő egyenlő nagyságú azonban egy feladat megoldásakor el kell dönteni, hogy K vagy K' koordináta rendszerből vizsgáljuk a jelenséget. Ebből következik az, hogy nem szokás egyszerre használni a két erőt hiszen egyszerre nem lehet 2 koordináta rendszerben sem.

2.5 A radián definíciója

Ha veszünk egy egységkört, ahol a sugár $\mathbf{r = 1}$, és az ívhossz szintén $\mathbf{i = 1}$, akkor $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{1\ rad}$ -al egyenlő. Ha ívmértéket használok akkor a körív segítségével mérem meg a szöget.



Ha megnöveljük a sugarat r_1 -ről r_2 -re akkor az i_1 ívhossz is megnő i_2 -re. Ebből arra lehet következtetni, hogy **r** sugár arányos az **i** ívhosszal, azaz:

$$\mathbf{r \sim i}$$

Ez az arányosság egyenes, ami az jelenti, hogy a két mennyiség hányadosa állandó.

$$\frac{\mathbf{i}}{\mathbf{r}} = \text{áll.} = \boldsymbol{\alpha}$$

A fenti összefüggésből azt kaptuk meg, hogy a radiánban megadott *α* szöget ki lehet számolni az i ívhossz és az r sugár hányadosából.

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{\mathbf{i}}{\mathbf{r}}$$

Ezt az összefüggést fogjuk felhasználni arra, hogy az $\mathbf{a_{cp}}$ kiszámítására adjunk egy másik alakot:

$$\frac{i}{r} = \alpha \rightarrow i = r \cdot \alpha \text{ és } \omega = \frac{\alpha}{t} \rightarrow \alpha = \omega \cdot t$$

$$s = i = r \cdot \alpha = r \cdot \omega \cdot t$$

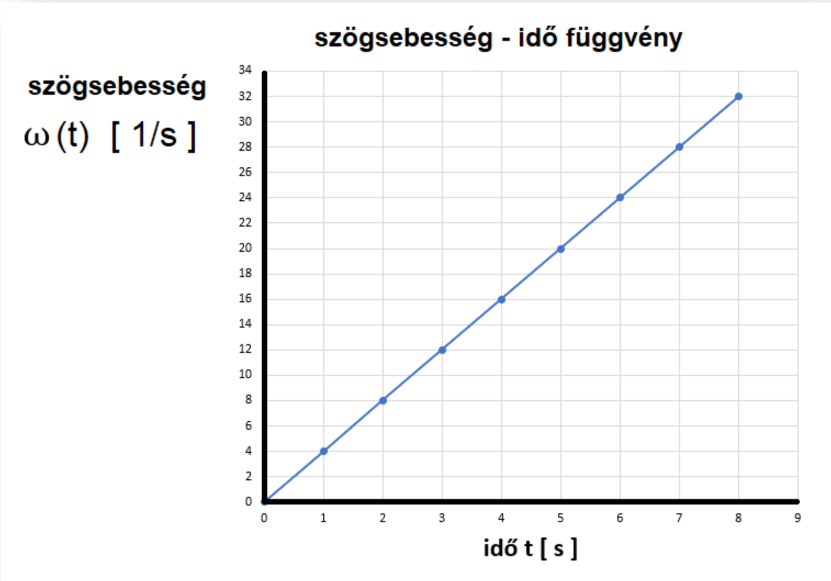
és ha behelyettesítjük a

$$v_k = \frac{i}{t} = \frac{r \cdot \omega \cdot t}{t} = r \cdot \omega$$

$$a_{cp} = \frac{\mathbf{v_k^2}}{\mathbf{r}} = \frac{v_k \cdot v_k}{r} = \frac{r \cdot \omega \cdot r \cdot \omega}{r} = \mathbf{r \cdot \boldsymbol{\omega}^2}$$

2.6 Egyenletesen változó körmozgás

Ha a körmozgás egyre gyorsabb akkor ez azt jelenti, hogy az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség növekszik az időben. Ezt láthatjuk a lenti szögsebesség idő függvényén $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{t})$**.**



Mivel az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség időfüggését megadó függvény egy origón átmenő egyenes ezért ebből arra lehet következtetni, hogy az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség arányos az $\mathbf{t}$ idővel.

$$\boldsymbol{\omega} \sim \mathbf{t}$$

Ez az arányosság egyenes, ami az jelenti, hogy a két mennyiség hányadosa állandó.

$$\frac{\omega}{t} = \text{áll.} = \beta$$

Ezt az állandót hívjuk az egyenletesen **változó** körmozgásra jellemző $\boldsymbol{\beta}$ szöggyorsulásnak, melynek mértékegysége: [$1/s^2$].

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{t}}$$

A P pont körmozgása során változik az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség, ezért ezt a mozgást változó körmozgásnak tekintjük. A $\boldsymbol{\beta}$ szöggyosulás jellemzi azt, hogy az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség hogyan változik.

$$\beta = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

A gyorsuló vagy lassuló, tehát változó körmozgás során azonban a nem csak az $\boldsymbol{\omega}$ szögsebesség változik, hanem a $\mathbf{v_k}$ kerületi sebesség is. A $\mathbf{v_k}$ kerületi sebesség változását az $\mathbf{a_t}$ érintő irányú gyorsulással fogjuk jellemezni a következő módon. Kinematikából tudjuk, hogy változó mozgás esetén a sebesség és az idő hányadosa a gyorsulás.

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A fenti egyenlethez hasonlóan a körmozgásra jellemző $\mathbf{v_k}$ kerületi sebesség és a megváltozásához szükséges idő hányadosa egyenlő az érintő irányú gyorsulással, $\mathbf{a_t}$ -vel.

$$a_t = \frac{\Delta v_k}{\Delta t} = \frac{\Delta(r \cdot \omega)}{\Delta t} = \frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t}$$

A körmozgás során a sugár nem változik meg így az álladó nagyságúnak, azaz konstansnak tekinthető, ezért kiemeljük.

$$\frac{r \cdot \Delta\omega}{\Delta t} = r \cdot \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = r \cdot \beta$$

Tehát azt kaptuk, hogy az a_t nagysága:

$$\mathbf{a_t = r \cdot \boldsymbol{\beta} = 1\ [\ m/\mathit{s}^2\ ]}$$

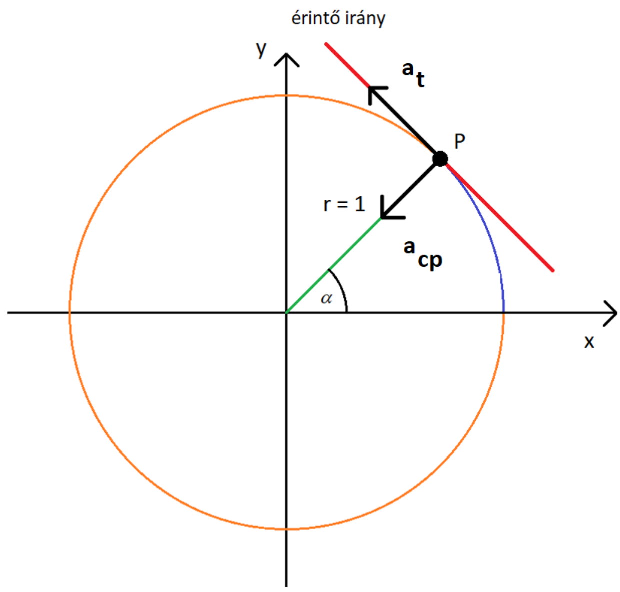
iránya pedig a változó körmozgás folyamán mindig érintő irányú melyet az alábbi ábrán ábrázoltam.

Összefoglalásként említsük meg, hogy 3 féle gyorsulás fordul elő ha a körmozgás változó:

1. centripetális gyorsulás: $\mathbf{a_{cp}}$

2. szöggyorsulás: $\boldsymbol{\beta}$, ok: növekszik az ω

3. érintő irányú gyorsulás: $\mathbf{a_t}$, ok: növekszik az v_k



Most hasonlítsuk össze az **egyenes vonalú egyenletesen változó (E. V. E. V.)** mozgást az **egyenletesen változó körmozgással**: **(E. V. K.)**

egyenes vonalú egyenletesen változó mozgás **(E. V. E. V.)**	**egyenletesen változó körmozgással**: **(E. V. K.)**
elmozdulás: $s = v_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$	**szögelfordulás:** $\alpha = \omega_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2$
sebesség: $v = a \cdot t$	**szögsebesség:** $\omega = \beta \cdot t$

Az összehasonlításból látható, hogy milyen mennyiségeket cseréltünk ki.

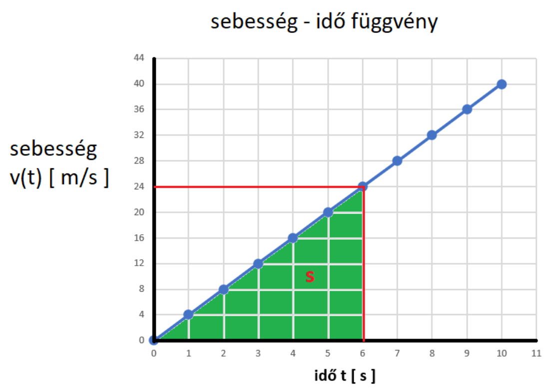
$$s \to \alpha$$

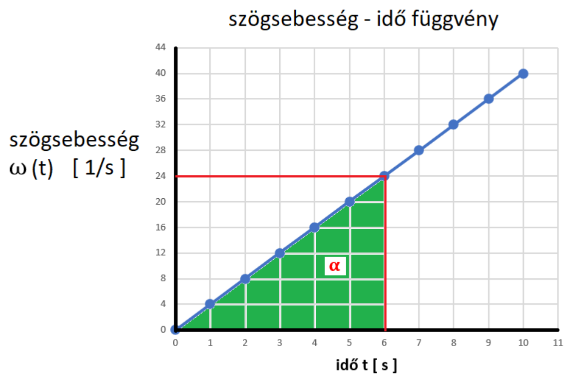
$$v \to \omega$$

$$a \to \beta$$

2.7 Görbe alatti területek leolvasása

A **v(t)** sebesség-idő függvény görbe alatti területe egyenlő a megtett úttal. Ebből következik, hogy az egyenletesen változó körmozgás esetén a **ω(t)** szögsebesség-idő függvény görbe alatti területe is egyenlő a szögelfordulással.





ω(t) szögsebesség-idő függvény görbe alatti területe, **v(t)** sebesség-idő függvény görbe alatti területe

pl. az **ω · t** szorzat egy téglalap területét adja meg, ezt még kettővel el kell osztani, hogy megkapjuk a görbe alatti területet, vagyis a háromszög területét.

sebesség: $$v = a \cdot t$$	**szögsebesség:** $$\omega = \beta \cdot t$$
elmozdulás, út $$s = \frac{v \cdot t}{2} = \frac{a \cdot t \cdot t}{2} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot t^2$$	**szögelfordulás** $$\alpha = \frac{\omega \cdot t}{2} = \frac{\beta \cdot t \cdot t}{2} = \frac{1}{2} \cdot \beta \cdot t^2$$