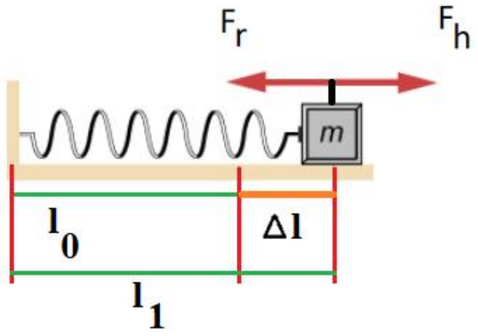
3. Harmonikus rezgőmozgás

Egy rugóhoz rögzített testet kitérítünk nyugalmi helyzetéből és magára hagyjuk, a test két a szélső helyzet között periodikusan ismétlődő mozgást fog végezni, amelyet rezgőmozgásnak hívunk.

3.1 A rugóerő

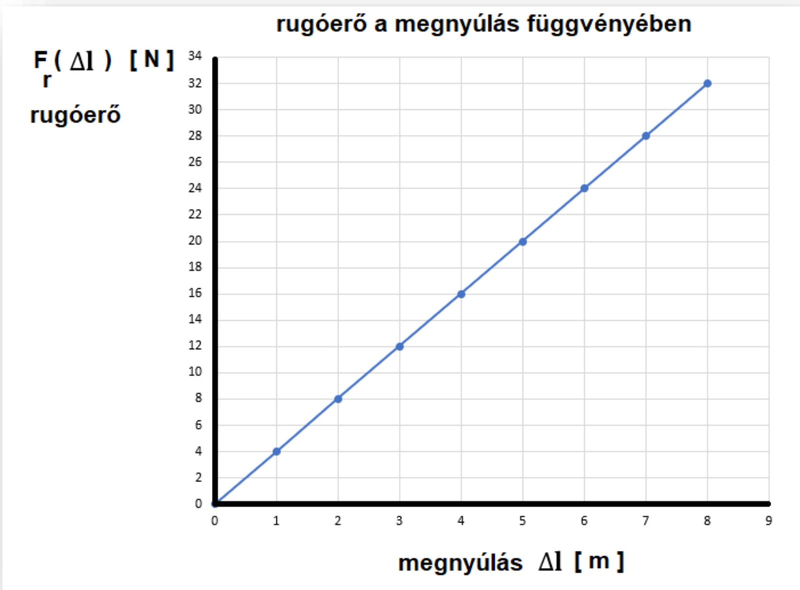


F_r rugóerő és a Δl megnyúlás

A rugót a nyugalmi hosszából egy $\mathbf{F_h}$ huzóerő segítségével megnyújtjuk $\mathbf{l_0}$-ról $\mathbf{l_1}$ hosszúságra akkor a megnyúlás $\mathbf{\Delta l}$ nagyságú:

$$\mathbf{\Delta l = l_1 - l_0}$$

A $\mathbf{F_h}$ húzóerő hatására keletkezik a rugóban $\mathbf{F_r}$ rugóerő, ami arra ellentétes irányú. Ha ábrázoljuk a $\mathbf{F_h}$ rugóerőt a $\mathbf{\Delta l = l_1 - l_0}$ megnyúlás függvényében, akkor egy origón átmenő egyenest kapunk.



F_r rugóerő a Δl megnyúlás függvényében.

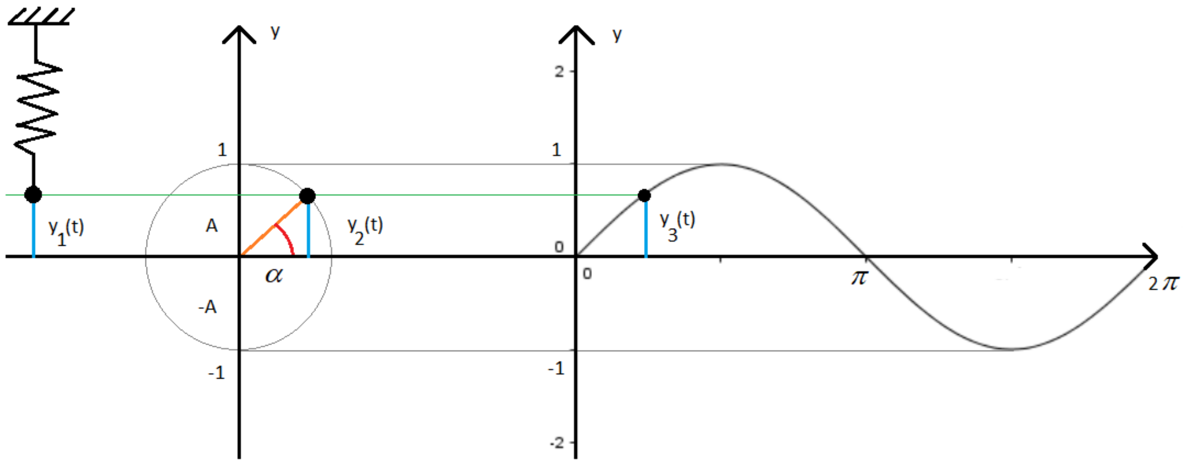
Ebből arra lehet következtetni, hogy az $\mathbf{F_r}$ és a $\mathbf{\Delta l}$ mennyiségek egyenesen arányosak, ami azt jelenti, hogy hányadosuk állandó.

$$\frac{F_r}{\Delta l} = \text{áll.} = \mathbf{D} \quad \left[\frac{N}{m}\right]$$

Ezt az állandót **D** rugóállandónak hívjuk (direkciós erő), és megadja, hogy milyen erős a rugó. Jegyezzük meg, hogy $\mathbf{F_r}$ és $\mathbf{\Delta l}$ ellentétes irányúak, amit egy negatív előjellel lehet kifejezni.

$$\mathbf{F_r = -D \cdot \Delta l}$$

3.2 A harmonikus rezgőmozgás és az egyenletes körmozgás kapcsolata



A rugóra akasztott test harmonikus rezgőmozgást végez. Az $\mathbf{y_1(t)}$ függvény megadja ennek a mozgásnak a vízszintes tengelytől vett távolságának időbeni változását. Egyszerűen azt, hogy a test milyen messze van a vízszintes tengelytől miközben telik az idő. Mellette az egyenletes körmozgást végző test vízszintestől mért távolságát minden időpillanatban $\mathbf{y_2(t)}$ függvény adja meg. A kétfajta mozgás azért van kapcsolatban, mert mindkettőt ugyanazzal a függvénnyel megadni. A fenti ábrán kék színnel vannak az **y(t)** függvényértékek megjelölve.

$$\mathbf{y_1(t) = y_2(t) = y_3(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

Ez a függvény a **harmonikus rezgőmozgás kitérés-idő függvénye**. Ehhez a képlethez úgy jutunk el, hogy: az egységkörben lévő derékszögű háromszögre felírjuk a szinusz függvényt:

$$\mathbf{\sin(\alpha) = \frac{y}{r} \quad | \cdot r \quad \rightarrow \quad y(\alpha) = r \cdot \sin(\alpha)}$$

A maximális kitérés az egységkörön függőleges irányban egyenlő a sugárral, a harmonikus rezgés maximális kitérését amplitúdónak hívjuk.

$$r = A$$

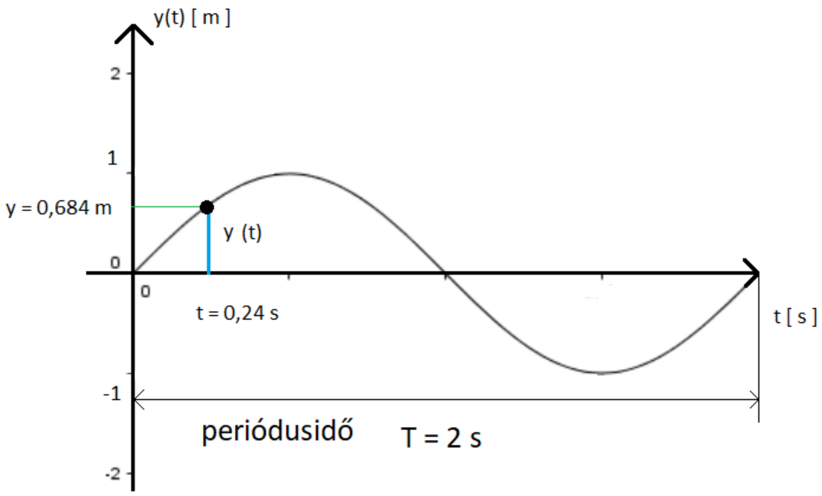
Körmozgásból tudjuk, hogy $\boldsymbol{\alpha = \omega \cdot t}$ ezt behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$\mathbf{y(\alpha) = r \cdot \sin(\alpha)}$$
$$\downarrow$$
$$\mathbf{y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)}$$

3.3 A harmonikus rezgőmozgás paraméterei

Azért mert a harmonikus rezgőmozgást és az egyenletes körmozgást ugyanazzal a függvénnyel lehet megadni, a körmozgásnál használt mennyiségek a rezgőmozgásnál is használhatóak. Ezt onnan is látjuk, hogy a harmonikus rezgőmozgás és az egyenletes körmozgás vízszintes tengelytől vett távolsága mindig egyenlő. Ezt megvizsgálhatjuk zseblámpa segítségével. Világítsuk meg bal oldalról mindkét mozgást. A függőlegesen rezgő test árnyéka és a körmozgást végző test árnyéka mindig egybeesik az ernyőn.

3.3.1 Periódusidő vagy rezgésidő



A periódusidő az az idő, ami egy egész rezgés teljes időtartama.

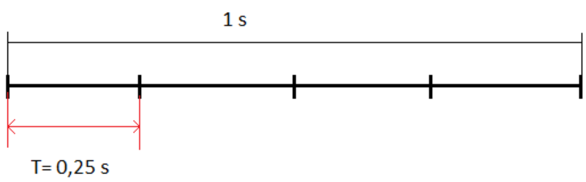
$$\mathbf{T = 1\,[\,s\,]}$$

A **kitérés-idő függvényt** $\mathbf{y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t)}$, arra lehet használni, hogy a segítségével minden időpillanatban meg lehet határozni a rezgő test helyzetét (vízszintes tengelytől vett távolságát). Ennek a függvénynek a **t idő** a változója, **y** pedig a **függvényértéke.** A fenti ábrán látható, hogy **t = 0,24 s** időponthoz, az **y = 0,684 m** távolság tartozik hozzá. Ebből következik, hogy a kis t-t nem szabad összekeverni a nagy T-vel, a kis t egy időpont, a nagy T pedig a periódusidő.

$$\mathbf{t \neq T}$$

3.3.2 Frekvencia

A T periódusidő segítségével ki lehet számolni a rezgés gyakoriságát vagy **frekvenciáját**. Ezt úgy lehet értelmezni, hogy megvizsgáljuk, hogy az egységnyi időtartamba hányszor fér bele a T periódusidő. Ha sokszor, akkor a rezgés „szapora", ellenkező esetben pedig „lomha".



pl.: Ha T=0,25 s, akkor ez négyszer fér bele az egységnyi időbe, így a rezgés gyakorisága vagy frekvenciája:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{0{,}25s} = 4\ \frac{1}{s} = 4\ \mathrm{Hz}$$

Ez alapján tehát a frekvenciát kiszámolhatjuk, a következő módon:

$$f = \frac{1}{T} = 1\left[\frac{1}{s}\right] = 1\ [\ \mathrm{Hz}\ ]$$

Szorozzuk meg a fenti egyenlet mindkét oldalát T-vel:

$$f \cdot T = 1$$

Ebből az egyenletből pedig látszik, hogy a frekvencia és a periódusidő fordítottan arányosak, vagyis szorzatuk állandó. Ez azt jelenti, hogy ha az egyik mennyiség megnő akkor a másik lecsökken. Pl.: **nagy** periódus idő **kis** frekvenciát jelent, vagy ennek a fordítottja is igaz: **kis** periódusidő pedig **nagy** frekvenciát.

3.3.3 Körfrekvencia vagy szögsebesség

Korábban elmagyaráztam, hogy az egyenletes körmozgást és a harmonikus rezgőmozgást ugyanaz a függvény írja le, pontosabban azonos a kitérés idő függvényük. A körmozgásnál használt mennyiségek a rezgőmozgásnál is használhatóak. Ilyen módon a rezgésnek is van körfrekvenciája vagy szögsebessége is.

$$\omega = \frac{2\pi}{T}\ [1/s]$$

A frekvenciát át lehet számolni a körfrekvenciába a következő képlettel:

$$\omega = 2\pi \cdot f$$

3.3.4 Amplitúdó

A rezgés amplitúdója egyenlő a legnagyobb kitéréssel.

$$y_{max} = A$$

Egy rezgést adottnak vagy meghatározottnak tekintünk, ha ismerjük az A amplitúdóját és a ω körfrekvenciáját.Pl.:

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) = 0{,}2m \cdot \sin\left(2\pi \frac{1}{s} \cdot t\right)$$

rövidebben:

$$\mathbf{y = 0,2\,sin(2\pi\, t)}$$

3.3.5 Sebesség és gyorsulás-idő függvények

$$\mathbf{v(t) = A \cdot \omega \cdot cos\ (\omega \cdot t)}$$

$$\mathbf{v_{max} = A \cdot \omega}$$

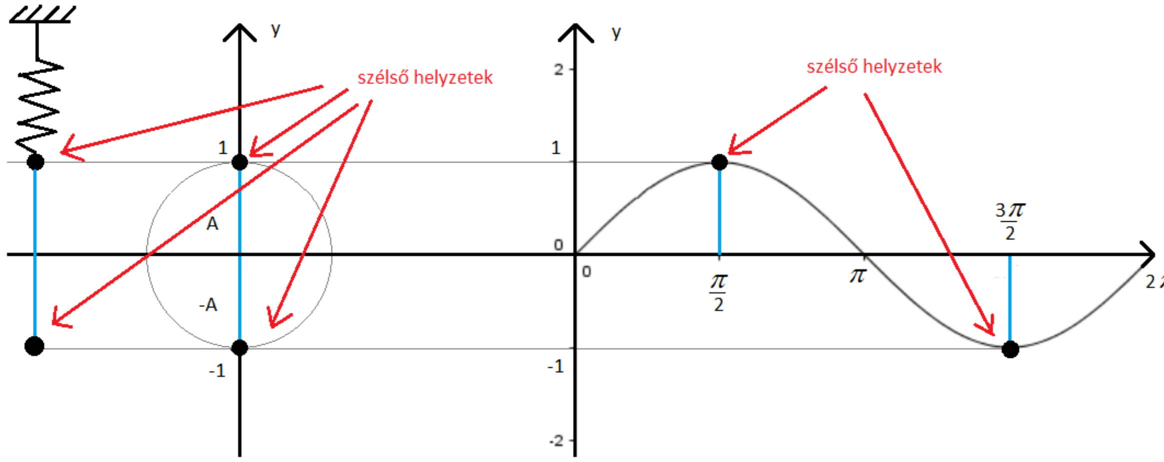
A sebesség-idő függvény segítségével minden időpillanatban meg lehet adni a rezgő test sebességét.

$$\mathbf{a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot sin(\omega \cdot t)}$$

$$\mathbf{a_{max} = -A \cdot \omega^2}$$

A gyorsulás-idő függvény segítségével minden időpillanatban meg lehet adni a rezgő test gyorsulását.

3.4. Szélső helyzet



A harmonikus rezgő mozgás szélső helyzete akkor jön létre amikor a rezgő test a legtávolabb van a vízszintes tengelytől, ekkor $\mathbf{y = y_{max} = A}$. Szélső helyzetben a **rugó teljesen össze van nyomva vagy pedig a teljesen ki van nyújtva**. A szélső helyzetet szögek segítségével is meg lehet adni.

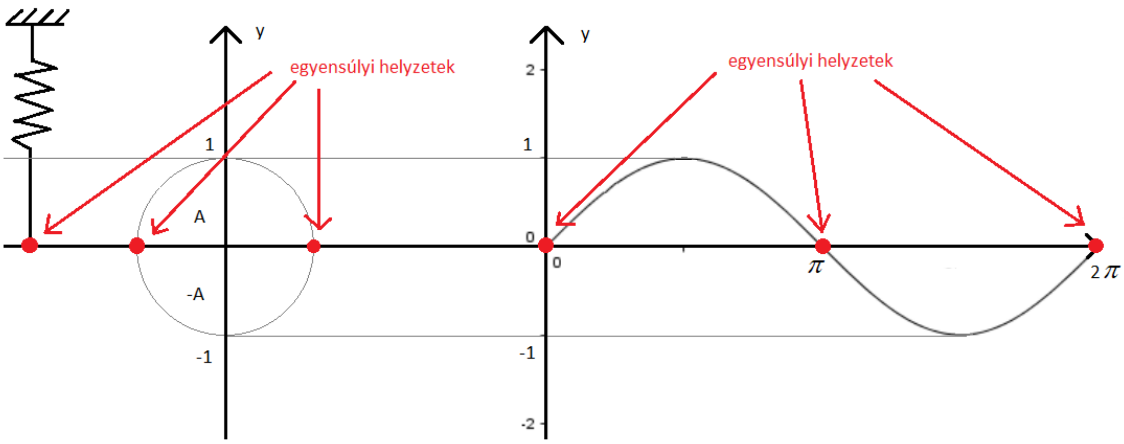
$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t), \text{ ahol } \alpha = \omega \cdot t = \frac{\pi}{2} \text{ vagy } \alpha = \omega \cdot t = \frac{3 \cdot \pi}{2}$$

Az $\boldsymbol{\alpha = \omega \cdot t}$ képlet miatt a vízszintes tengelyen lévő változót ki lehet cserélni, így az $\mathbf{t}$ idő helyett $\boldsymbol{\alpha}$ szöget is lehet használni. A szélső helyzetben a rezgő test sebessége zérus, hiszen test éppen irányt vált ehhez viszont meg kell állnia. A rezgő test gyorsulása pedig maximális ebben a pillanatban mert rugó vagy teljesen össze van nyomva, vagy teljesen ki van nyújtva.

3.5. Egyensúlyi helyzet

A harmonikus rezgő mozgás **egyensúlyi helyzete** akkor jön létre amikor a rezgő test a vízszintes tengelyen van rajta, ekkor **y = 0, vagyis a rugó nyújtatlan**. Ezt szögek segítségével is meg lehet adni.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t), \text{ ahol } \alpha = \omega \cdot t = \pi \text{ vagy } \alpha = \omega \cdot t = 2 \cdot \pi$$



A egyensúlyi helyzetben a rezgő test sebessége maximális. A rezgő test gyorsulása pedig zérus, mert ebben a pillanatban változik meg a gyorsulás iránya.

3.6 Harmonikus rezgőmozgás dinamikai feltétele:

Harmonikus rezgőmozgás akkor jöhet létre, ha rendelkezésre áll egy olyan erő ami a **kitérítéssel arányos nagyságú és ellentétes irányú**. A rugó erő pont ilyen erő. Az, hogy a kitérítéssel arányos azt jelenti, hogy az erő annál nagyobb minél nagyobb a kitérítés. Ez egy speciális feltétel, amit nem minden erő tud.

Pl.: ha egy testet húzunk F erővel vízszintesen, akkor ez az erő nem rendelkezik a fent említett tulajdonsággal. Ennek az erőnek a nagysága nem változik.

3.7 A rezgés körfrekvenciájának kiszámítása a rugó adataiból

$$a(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t) = -A \cdot \omega^2$$

$$F_r = -D \cdot \Delta l$$

$$A = \Delta l = y$$

$$F = m \cdot a$$

$$-D \cdot y = -\omega^2 \cdot y \cdot m \quad |\cdot (-1)$$

$$D \cdot y = \omega^2 \cdot y \cdot m \quad |: y$$

$$D = \omega^2 \cdot m \quad |: m$$

$$\frac{D}{m} = \omega^2 \; |: \sqrt{(\;)}$$

$$\boldsymbol{\omega = \sqrt{\frac{D}{m}}}$$

$$f = \frac{\omega}{2 \cdot \pi} = \frac{\sqrt{\frac{D}{m}}}{2 \cdot \pi}, \; T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{D}}$$

Ebből a levezetésből azt kaptuk meg, hogy rezgés körfrekvenciája 2 dologtól függ:

1. rugóra akasztott test tömegétől: m-től

2. A rugó erősségétől: D-től.

Ha a rugó erős akkor D nagy így f is nagy, vagyis a rezgés szapora.

Ha az m-et növelem akkor f csökken, vagyis a rezgés lomhább.

3.8 A rezgés energiája

Ebben a fizikai rendszerben 2 fajta energia van jelen:

3.8.1 A rezgő test helyzeti energiája

Ezt gyakran nevezzük rugalmas energiának is, emellett elterjedt a potenciális energia elnevezés is. Azért hívják ezt az energiát helyzeti energiának mert az energiát megadó képletben a változó az y hely. ($E(y) = 1/2 \cdot D \cdot y^2$)

$$\mathbf{E_{rugalmas} = E_{helyzeti} = E_{potenciális} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2}$$

3.8.2 A rezgő test mozgási energiája

Ezt az energiát gyakran nevezzük kinetikai energiának is. Azért hívják ezt az energiát mozgási energiának mert az energiát megadó képletben a változó az **v** sebesség. ($E(v) = 1/2 \cdot m \cdot v^2$)

$$\mathbf{E_{mozgási} = E_{kinetikai} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2}$$

Szélső helyzet: **y = A**

$$E_{mecahnikai} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot 0^2 = \mathbf{\frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2}$$

Egyensúlyi helyzet: **y = 0**

$$E_{mecahnikai} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot 0^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \mathbf{\frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2}$$

Jegyezzük meg, hogy a m tömegű rugóra akasztott test rezgése sohasem fejeződik be, hiszen a súrlódástól és közegellenállástól eltekintünk, vagyis nincs semmi ami lassítaná a test mozgását.

3.8.3 A rezgés teljes mechanikai energia

A teljes mechanikai energia a két féle energia összege, amely a rezgés során állandó nagyságú.

$$E_{mecahnikai} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot y^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = \text{áll.}$$

Megmutatható, hogy ennek a két energiának az összege egy időtől független **állandó** érték.

$$y(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t),\ v(t) = A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t)$$

$$E_{mecahnikai} = \frac{1}{2} \cdot D \cdot (A \cdot \sin(\omega \cdot t))^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot (A \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t))^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot D \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t) =$$

mivel:

$$\boldsymbol{\omega} = \sqrt{\frac{\mathbf{D}}{\mathbf{m}}} \rightarrow \mathbf{D} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}^2$$

ezért,

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{D} \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot \mathrm{t}) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\omega}^2 \cdot \mathrm{A}^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot \mathrm{t}) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{D} \cdot A^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot \mathrm{t}) + \frac{1}{2} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathrm{A}^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot \mathrm{t}) =$$

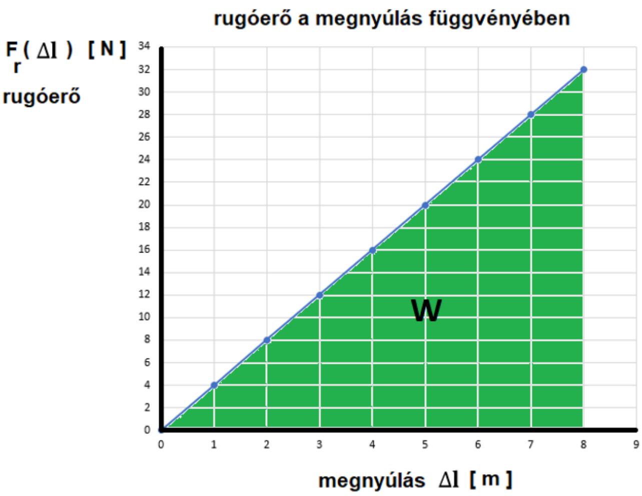
$$= \frac{1}{2} \cdot \mathrm{D} \cdot A^2 \cdot (\sin^2(\omega \cdot \mathrm{t}) + \cos^2(\omega \cdot \mathrm{t})) =$$

és trigonometriából tudjuk, hogy $\sin^2(\omega \cdot \mathrm{t}) + \cos^2(\omega \cdot \mathrm{t}) = 1$, így:

$$\mathbf{E}_{\mathbf{mecahnikai}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{A}^2$$

Tehát azt kaptuk, hogy a súrlódás mentes rugóra akasztott test rezgésének teljes mechanikai energiáját a fenti összefüggéssel számolhatjuk ki.

3.9 A rugó által végzett munka



A munkavégzés számolható az erő és az elmozdulás szorzataként.

$$\mathrm{W} = \mathrm{F} \cdot \mathrm{s}$$

A rugó esetében az erőhatás nem állandó nagyságú hanem arányos a megnyúlással $\mathbf{\Delta l}$ -el, pontosabban azzal egyenesen arányos.

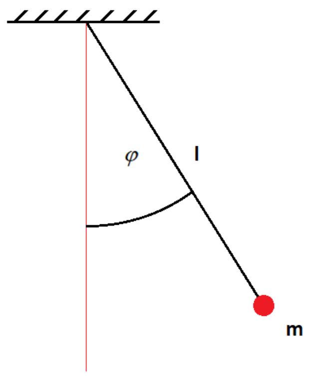
$$\frac{F_r}{\Delta l} = \text{áll.} = D$$

Ebből következik, hogy ha $\mathbf{\Delta l}$ nő akkor az F erő is növekedni fog. A munkavégzés nagysága a **F(Δl)** függvény görbe alatti területével egyenlő nagyságú.

$$\mathbf{W = \frac{1}{2} \cdot D \cdot \Delta l^2}$$

3.10 Matematikai inga

Az egyik legegyszerűbb periodikus rezgő mozgást végző rendszer a matematikai inga. Ennek a rendszernek a T periódusideje csak a fonál hosszától és a nehézségi gyorsulástól g -től függ.



$$\mathbf{f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} \quad T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}}$$

ahol: g=9,81 m/s²